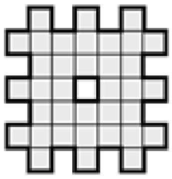
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ (2019–2020 учебный год)

7 класс

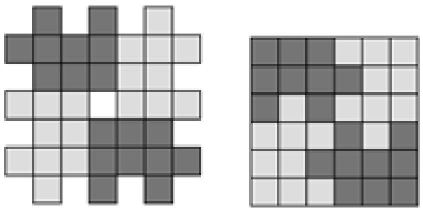
1. Сумма 2020 натуральных чисел является нечётным числом. Каким числом (чётным или нечётным) является произведение этих чисел? Ответ подробно обоснуйте.

   Решение. Так как сумма четного числа слагаемых нечетна, то среди них есть хотя бы одно четное число. Произведение любого количества чисел четно, если среди сомножителей есть хотя бы один четный. **Ответ: четным числом.**

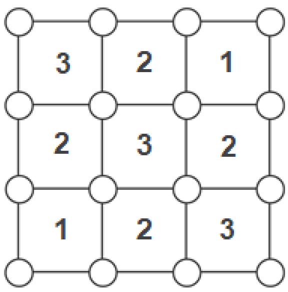
2. Разрежьте фигуру на четыре части, из которых можно сложить квадрат.



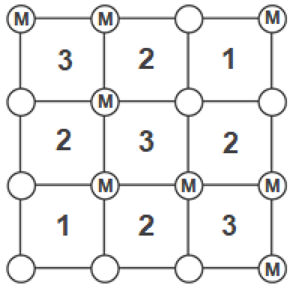
   Решение. Площадь данной фигуры равна 36, поэтому сложить нужно квадрат со стороной 6, а разрезать данную фигуру можно, например, так:



3. Квадратное поле размером 3×3 разбито на 9 квадратных ячеек. В центре каждой из них записано число, указывающее на количество монет, спрятанных в углах этой ячейки (в каждом углу спрятано не более одной монеты). Сколько всего монет расположено на этом квадратном поле размером 3×3?



   Решение. Рассмотрим 4 угловые ячейки. В них спрятано $3 + 3 + 1 + 1 = 8$ монет. Заметим, что эти 4 ячейки содержат все 16 кружков. Но 4 кружка центральной ячейки содержат 3 монеты, значит, во всех кружках на периметре квадрата 3×3 находится $8 - 3 = 5$ монет. Прибавим к этим 5 монетам ещё 3 монеты во внутреннем квадрате 1×1, получим, что всего 8 монет. Пример:



Ответ: 8.

Комментарий. Если решение основано на построении **верного** примера – полный балл.

4. Буратино закопал на Поле Чудес два слитка: золотой и серебряный. В те дни, когда погода хорошая, золотой слиток увеличивается на 30%, а серебряный – на 20%. А в те дни, когда погода плохая, золотой слиток уменьшается на 30%, а серебряный – на 20%. Через неделю оказалось, что один из слитков увеличился, а другой уменьшился. Сколько дней была хорошая погода?

   Решение. Увеличение числа на 20% равносильно его умножению на 1,2, а уменьшение числа на 20% – его умножению на 0,8 (для 30% – соответственно на 1,3 и 0,7). Поэтому результат не зависит от чередования хорошей и плохой погоды, а только от количества хороших и плохих дней.

   После одного хорошего и одного плохого дня оба слитка уменьшаются: $1,2 \cdot 0,8 < 1$ и $1,3 \cdot 0,7 < 1$ (это утверждение верно для любого количества процентов). Это значит, что после трёх хороших и трёх плохих дней оба слитка уменьшились. Следовательно, хороших дней – не меньше четырёх. Вариант с четырьмя хорошими днями подходит – золотой слиток уменьшается, а серебряный увеличивается. Действительно, $1,2^4 \cdot 0,8^3 > 1$, а $1,3^4 \cdot 0,7^3 < 1$. С другой стороны, после двух хороших и одного плохого дня золотой слиток увеличивается. Значит, он увеличивается также после четырёх хороших и двух плохих дней, и тем более после пяти хороших и двух плохих. Таким образом, если хороших дней пять и более, то золотой слиток растёт. Поэтому только при четырёх хороших днях один слиток растёт, а другой уменьшается. **Ответ: четыре.**

   Комментарий. Если без обоснования используется факт, что ответ не зависит от чередования хороших и плохих дней, то ставится не более 4 баллов.

5. Пять подружек Соня, Таня, Лена, Галя и Вика родились в пяти городах: Риге, Пензе, Казани, Белгороде и Москве. Каждая из них любит конфеты, производимые в одном из этих городов. Известно, что никто не любит конфеты, произведенные в родном городе. Соня любит конфеты из Риги. Таня родом из Риги, у нее любимые конфеты из Пензы. Вика любит конфеты из Москвы. Галины любимые конфеты производят в Белгороде. Вика родом из Казани. Уроженка Пензы любит конфеты, сделанные на родине Лены. Кто из подруг родился в Москве?

   Решение. Из условия можно определить, кто какие **конфеты** любит:

   Соня – из Риги;

   Таня – из Пензы;

   Вика – из Москвы;

   Галя – из Белгорода; значит, Лена – из Казани.

Известно, что никто не любит конфеты, произведенные в родном городе. Отметим в таблице это условие, а также условия, что Таня родом из Риги, а Вика родом из Казани.

	Соня	Таня	Лена	Галя	Вика
Рига	–	+	–	–	–
Пенза		–			–
Казань	–	–	–	–	+
Белгород		–		–	–
Москва		–			–

Так как уроженка Пензы любит конфеты, сделанные на родине Лены, то Лена не из Пензы. Если Лена из Москвы, то уроженка Пензы любит конфеты, сделанные в Москве, то есть из Пензы должна быть Вика. Но Вика из Казани. Значит, Лена из Белгорода. Конфеты из Белгорода любит Галя, значит, Галя из Пензы. Тогда остается, что родом из Москвы – Соня. **Ответ: Соня.**

8 класс

1. Каждый полуврун поочередно через день врёт и говорит правду (если сегодня врёт, то завтра говорит правду и наоборот). Ровно неделю назад один полуврун высказал два утверждения: «Вчера была среда»; «Завтра будет четверг». Сегодня он высказал два других утверждения: «Вчера была пятница» и «Завтра будет выходной». Можно ли определить какой сегодня день недели? Ответ подробно обоснуйте.

   Решение. Утверждения «Вчера была среда» и «Завтра будет четверг» не могут быть верными одновременно, значит, неделю назад полуврун лгал. Так как в неделе нечетное количество дней, то сегодня он говорит правду. Значит, вчера была пятница, тогда сегодня суббота. **Ответ: можно, суббота.**

2. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 12 различных натуральных делителей, наибольший простой делитель которого есть число 101, а последняя цифра – нуль.

   Решение. Пусть n – искомое число. По условию $n \vdots 101$, $n \vdots 2$, $n \vdots 5$. Рассмотрим число $m = 2 \cdot 5 \cdot 101$, заметим, что оно имеет ровно 8 различных натуральных делителей (1, 2, 5, 101, $2 \cdot 5$, …, $2 \cdot 5 \cdot 101$), значит, $n > m$. Поскольку n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию задачи, то далее рассмотрим число $2 \cdot m = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, полученное из m умножением на наименьшее из простых чисел. Заметим, что число $2m = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ имеет ровно 12 различных натуральных делителей (1, 2, 4, 5, 101, $2 \cdot 5$, …, $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$), а значит, $n = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$. **Ответ: 2020.**

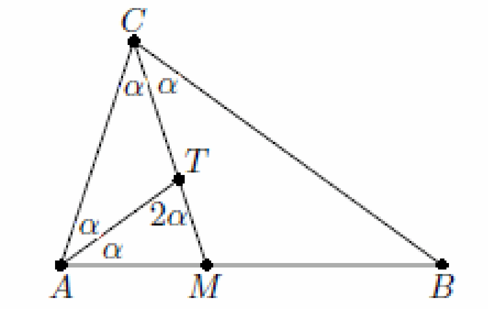
   Комментарий. В решении может использоваться известная функция $\tau(n)$ – количество натуральных делителей числа n. Причем, если каноническое разложение на простые множители числа n имеет вид $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Если участник олимпиады использует последнюю формулу без доказательства, то баллы не снимаются.

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых цифра тысяч больше цифры сотен?

   Решение. Цифра в разряде тысяч может принимать одно из 9 возможных значений: 1, 2, 3, ..., 9 (нельзя брать 0, поскольку число четырёхзначное). Для каждого из этих вариантов можно указать соответствующее число вариантов для цифры сотен: 1, 2, 3, ..., 9. То есть, всего $1+2+\ldots+9 = 45$ вариантов. Остальные две цифры произвольные (по 10 вариантов), поэтому получаем ответ: $45 \cdot 10 \cdot 10 = 4500$ вариантов. **Ответ: 4500.**

4. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

   Решение. Так как сумма углов A и C треугольника ABC меньше, чем 180°, то $\angle TAC + \angle TCA < 90°$, поэтому угол ATC – тупой (см. рисунок).



Значит, в равнобедренном треугольнике ATC сторона AC является основанием. Тогда $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$. Угол ATM – внешний для треугольника ATC, следовательно, $\angle ATM = 2\alpha$.

Треугольник ATM также является равнобедренным. Если T – его вершина, то $\angle TMA = \angle TAM = \alpha$, тогда сумма углов этого треугольника равна 4α. Но 4α – сумма углов A и C исходного треугольника, то есть меньше $180°$. Значит, TM – основание треугольника ATM, а сумма его углов равна 5α. Отсюда $\alpha = 36°$.

Треугольник CMB также оказывается равнобедренным, так как $\angle MCB = \angle MBC = 36°$. **Ответ: 36°, 72°, 72°.**

5. Какое минимальное число фишек нужно взять, чтобы при любой их расстановке на клетках шахматной доски обязательно встретились бы 4 фишки, стоящие друг за другом по горизонтали?

   Решение. Рассмотрим одну горизонталь. Чтобы в ней обязательно встретились 4 фишки, в ней должно быть не меньше 7 фишек (6 фишек можно расставить в две группы по 3 фишки). Если всего будет $6 \cdot 8 + 1 = 49$ фишек, то по принципу Дирихле обязательно найдётся горизонталь, в которой будет не менее 7 фишек. С другой стороны, меньшим числом фишек обойтись нельзя: 48 фишек можно разместить по 6 в каждом ряду так, что условие не будет выполнено. **Ответ: 49.**
   Комментарий. Только правильный ответ – 1 балл. Показано, что 49 фишек всегда достаточно – не менее 4 баллов.

9 класс

1. Числа p и b являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 2020ax + c = 0$, $a \neq 0$. Найдите сумму корней квадратных уравнений $ax^2 + bx + d = 0$ и $ax^2 + px + q = 0$, если каждое из них имеет 2 различных действительных корня.

   Решение. Так как p и b – корни квадратного уравнения $x^2 + 2020ax + c = 0$, то по теореме Виета $p + b = -2020a$. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + d = 0$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $ax^2 + px + q = 0$, тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_3 + x_4 = -\dfrac{p}{a}$. Итак, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{p}{a} = -\dfrac{b+p}{a} = -\dfrac{-2020a}{a} = 2020$.
   Ответ: 2020.

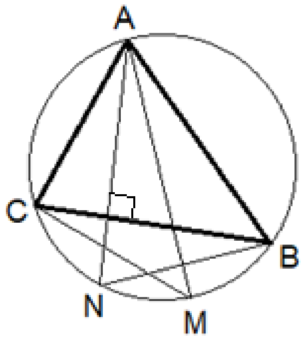
   Комментарий. Утверждение теоремы Виета участник олимпиады ошибочно называет теоремой обратной теореме Виета – баллы не снимать.

2. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 12 различных натуральных делителей, наибольший простой делитель которого есть число 101, а последняя цифра – нуль.

   Решение. Пусть n – искомое число. По условию $n \vdots 101$, $n \vdots 2$, $n \vdots 5$. Рассмотрим число $m = 2 \cdot 5 \cdot 101$, заметим что оно имеет ровно 8 различных натуральных делителей (1, 2, 5, 101, $2 \cdot 5$, …, $2 \cdot 5 \cdot 101$), значит $n > m$. Поскольку n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию задачи, то далее рассмотрим число $2 \cdot m = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, полученное из m умножением на наименьшее из простых чисел. Заметим, что число $2m = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ имеет ровно 12 различных натуральных делителей (1, 2, 4, 5, 101, $2 \cdot 5$, …, $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$), а значит $n = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$. **Ответ: 2020.**

   Комментарий. В решении может использоваться известная функция $\tau(n)$ – количество натуральных делителей числа n, причем если каноническое разложение на простые множители числа n имеет вид $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Если участник олимпиады использует последнюю формулу без доказательства, то баллы не снимаются.

3. Треугольник ABC вписан в окружность. Точки M и N такие, что отрезок AM является диаметром, а отрезок AN перпендикулярен стороне BC. Докажите, что $BN = CM$.



   Решение 1. Хорды CB и AN перпендикулярны по условию, хорды MN и AN тоже перпендикулярны, потому что треугольник ANM – прямоугольный с гипотенузой AM. Таким образом, имеем две параллельные хорды CB и MN, между которыми равные дуги CN и BM. Поэтому хорды BN и CM стягивают равные дуги, и длины их равны.

Решение 2. Пусть $\angle CAN = \alpha$. Так как $CB \perp AN$, то $\angle ACB = 90° - \alpha$. Так как углы ACB и ANB опираются на одну дугу, то $\angle ACB = \angle ANB = 90° - \alpha$. Поскольку AM – диаметр, то $\angle ANM = 90°$, но тогда $\angle BNM = 90° - \angle ANB = \alpha$. Заметим, что $\angle BNM = \angle BAM = \alpha$. Итак, $\angle CAM = \angle BAN = \alpha + \angle MAN$, а равные вписанные углы опираются на равные хорды, то есть $CM = BN$.

4. На свой день рождения Пятачок испек большой пирог весом 10 кг и пригласил 100 гостей. Среди них был Винни-Пух, неравнодушный к сладостям. Именинник огласил правило деления пирога: первый гость отрезает себе кусок пирога размером 1%, второй гость отрезает себе кусок пирога размером 2% от оставшейся части, третий гость отрезает себе кусок пирога размером 3% от оставшейся части и так далее. Какое место по счету в очереди нужно занять Винни-Пуху, чтобы получить наибольший кусок пирога?

   Решение. Первые в очереди гости получают всё увеличивающиеся куски пирога, потому что остатки пирога на первых этапах деления большие. Но поскольку остатки пирога уменьшаются, то наступит момент, когда гости станут получать уменьшающиеся куски пирога. На каком же по счету госте это произойдет?

   Сравним куски пирога, которые получили $(n-1)$-ый и n-ый гости. Пусть масса оставшейся части пирога, когда подошла очередь $(n-1)$-го гостя равна m кг. Тогда $(n-1)$-ый гость получил $\frac{n-1}{100} \cdot m$ кг, и остаток пирога стал равным $m - \frac{n-1}{100} \cdot m$ кг, что после упрощения будет равно $\frac{101-n}{100} \cdot m$ кг. Поэтому n-ый гость получил $\frac{101-n}{100} \cdot m \cdot \frac{n}{100} = \frac{n(101-n)}{10000} \cdot m$ кг. Разность между кусками n-го и $(n-1)$-го гостя равна $\frac{n(101-n)}{10000} \cdot m - \frac{n-1}{100} \cdot m = \frac{-n^2+n+100}{10000} \cdot m$. Эта разность положительна при условии $n^2 - n - 100 < 0$. Решая квадратное неравенство, находим, что наибольшим натуральным решением является $n = 10$. Значит, 10-ый по счету гость получит наибольший кусок пирога, поэтому Винни-Пуху нужно занимать в очереди 10-е место.
   Ответ: 10.

5. На сайте футбольного клуба «Астрахань» проводится опрос, кого из m футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует один раз за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – это доля голосов, отданных за него, в процентах, округленных до целого числа. После того, как проголосовало несколько посетителей, суммарный рейтинг номинантов составил 95%. При каком наименьшем m такое возможно?

   Решение. Пусть a – наибольшая потеря доли процента при округлении для определения рейтинга футболиста. Тогда, согласно правилам округления, $a < 0,5$. Если суммарный рейтинг составил 95%, то суммарная потеря равна 5%, поэтому $0,5m > am \geqslant 5$, значит, $0,5m > 5$ или $m > 10$.

   Покажем, что при $m = 11$ решение имеется. Например, $m = 11$ и проголосовало 73 посетителя, причем 33 из них проголосовали за одного футболиста, а остальные 40 посетителей отдали свои голоса 10 футболистам поровну по 4 голоса. В этом случае суммарный рейтинг равен

   $\frac{33}{73} \cdot 100\% + 10 \cdot \frac{4}{73} \cdot 100 \approx 45\% + 10 \cdot 5\% = 95\%$.

   Значит, минимальное $m = 11$. **Ответ: 11.**

10 класс

1. Последовательность задана рекуррентным способом: $a_1=1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Найдите сумму 1730 первых членов этой последовательности.

   Решение. Найдем несколько первых членов последовательности: $a_3 = a_2/a_1 = 2/1 = 2$; $a_4 = a_3/a_2 = 2/2 = 1$; $a_5 = a_4/a_3 = 0,5$; $a_6 = a_5/a_4 = 0,5/1 = 0,5$; $a_7 = a_6/a_5 = 0,5/0,5 = 1$ и $a_8 = a_7/a_6 = 1/0,5 = 2$. Заметим, что последовательность оказалась периодической, её шесть первых членов 1; 2; 2; 1; 0,5; 0,5 будут бесконечно повторяться. Поскольку последовательность периодическая, с периодом шесть, а $1728 : 6 = 288$ и $a_1+a_2+\ldots+a_6 = 7$, то $\sum\limits_{i=1}^{1730} a_i = \sum\limits_{i=1}^{1728} a_i+a_{1729}+a_{1730} = 288\cdot 7+1+2 = 2019$.

   Ответ: 2019.

2. Можно ли число 2020 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

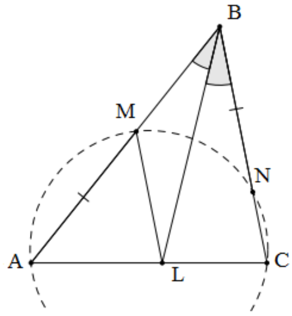
   Решение. У каждого слагаемого одна и та же сумма цифр, поэтому их остатки от деления на 3 одинаковы (сумма цифр числа дает тот же остаток от деления на 3 (и на 9), что и само число). Сумма 99 одинаковых остатков делится на 3, значит, и сумма любых 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр делится на 3. Но число 2020 на 3 не делится. **Ответ: нет.**

   Комментарий. Аналогично можно рассуждать об остатках от деления на 9.

3. Книга сшита из 12 одинаковых тетрадей. Каждая тетрадь состоит из нескольких двойных листов, вложенных друг в друга. Тетради книги сшиты последовательно друг за другом. Все страницы книги пронумерованы, начиная с 1. Сумма номеров четырех страниц одного из двойных листов четвертой тетради равна 338. Сколько страниц в этой книге?

   Решение. Пусть в книге x страниц, следовательно, в каждой тетради $\dfrac{x}{12}$ страниц, в первых трех тетрадях $\dfrac{3x}{12} = \dfrac{x}{4}$ страниц, в первых четырех тетрадях $\dfrac{4x}{12} = \dfrac{x}{3}$ страниц. Номера первой и второй страницы четвёртой тетради будут $\dfrac{x}{4}+1$ и $\dfrac{x}{4}+2$, а предпоследней и последней страницы $\dfrac{x}{3}-1$ и $\dfrac{x}{3}$. Так как суммы номеров всех двойных листов для каждой из тетрадей одинаковы, то получим уравнение $\left(\dfrac{x}{4}+1\right)+\left(\dfrac{x}{4}+2\right)+\left(\dfrac{x}{3}-1\right)+\dfrac{x}{3} = 338$, поэтому $x = 288$. **Ответ: 288.**

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $AM = BN$ и четырехугольник $AMNC$ – вписанный. Пусть BL – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что прямые ML и BC параллельны.



Решение. Из того, что точки A, M, N и C лежат на одной окружности, следует, что $BM \cdot BA = BN \cdot BC$, или $AB : BC = BN : BM$. Из того, что BL – биссектриса треугольника ABC, следует, что $AL : LC = AB : BC$. Тогда $AL : LC = AB : BC = BN : BM = AM : MB$, то есть $AL : LC = AM : MB$, откуда по теореме, обратной теореме Фалеса, получаем, что $ML \parallel BC$, что и требовалось доказать.

Комментарий 1. Теорема, обратная теореме Фалеса, ошибочно названа участником олимпиады теоремой Фалеса – баллы не снимать.

Комментарий 2. Ссылка на теорему, обратную теореме Фалеса, может быть заменена доказательством подобия треугольников AML и ABC.

5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

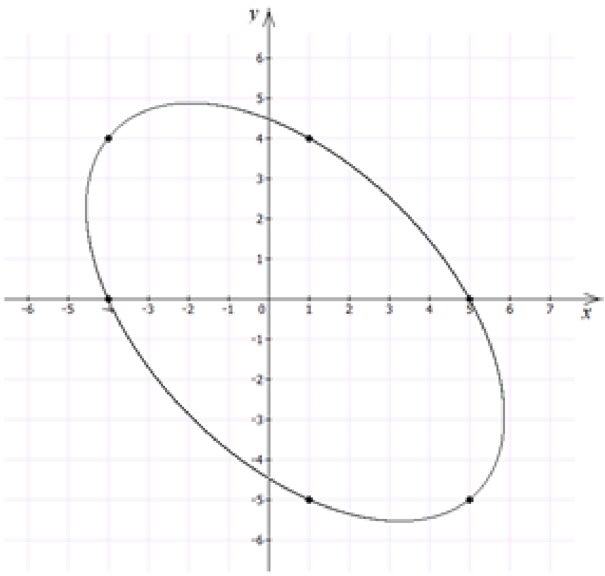
$$x^2 + xy + y^2 = x + 20.$$

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно переменной x: $x^2+(y-1)x+(y^2-20) = 0$. Его дискриминант $D = (y-1)^2-4(y^2-20) = 81-2y-3y^2$ должен быть неотрицательным, то есть $3y^2+2y-81 \leqslant 0$. Это неравенство выполняется при $y \in \left[\dfrac{-1-2\sqrt{61}}{3}; \dfrac{-1+2\sqrt{61}}{3}\right]$. В этом промежутке десять целых y от -5 до 4. Поскольку нужно найти пары целых чисел, то дискриминант D должен быть полным квадратом. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это будет при $y = -5; 0; 4$.

- 1) Если $y = -5$, то $D = 16$ и получим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$, имеющее целые корни 1 и 5, и значит, найдены две пары целых чисел $(1; -5)$ и $(5; -5)$.
- 2) Если $y = 0$, то $D = 81$ и получим уравнение $x^2 - x - 20 = 0$, имеющее целые корни -4 и 5, и значит, найдены две пары целых чисел $(-4; 0)$ и $(5; 0)$.
- 3) Если $y = 4$, то $D = 25$ и получим уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$, имеющее целые корни -4 и 1, и значит, найдены две пары целых чисел $(-4; 4)$ и $(1; 4)$.

Таким образом, данному уравнению удовлетворяют шесть пар целых чисел: $(1; -5)$, $(5; -5)$, $(-4; 0)$, $(5; 0)$, $(-4; 4)$ и $(1; 4)$. **Ответ:** $(1; -5)$**,** $(5; -5)$**,** $(-4; 0)$**,** $(5; 0)$**,** $(-4; 4)$**,** $(1; 4)$**.**

Комментарий. Графиком уравнения $x^2 + xy + y^2 = x + 20$ является эллипс, изображенный ниже. На рисунке видно, что эллипс проходит через шесть точек с вышеуказанными целыми координатами.



11 класс

1. Найдите сумму коэффициентов многочлена, полученного после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении
$(2x^{2021} - x^{2020} + x^{2019})^{11} - 29$.

   Решение. Во-первых, заметим, что сумма коэффициентов любого многочлена канонического вида $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ равна $P(1)$. Далее отметим, что после возведения скобки в 11 степень многочлен $Q(x) = (2x^{2021} - x^{2020} + x^{2019})^{11} - 29$ примет канонический вид (какие-то из коэффициентов при этом могут оказаться равными нулю). Итак, сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна $Q(1) = 2^{11} - 29 = 2019$. **Ответ: 2019.**

   Комментарий. Решения, в которых в том или ином виде фигурирует значение многочлена в точке 1, оцениваются в полный балл. Например, «Очевидно, что сумма коэффициентов многочлена равна его значению в точке 1. Ответ: 2019.» или «$Q(1) = 2019$». Дан **только** верный ответ – 3 балла.

2. Можно ли число 2019 представить в виде суммы 90 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр?

   Решение. У каждого слагаемого одна и та же сумма цифр, поэтому их остатки от деления на 9 одинаковы (сумма цифр числа дает тот же остаток от деления на 9, что и само число). Сумма 90 одинаковых остатков делится на 9, значит, и сумма любых 90 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр делится на 9. Но число 2019 на 9 не делится. **Ответ: нет.**

   Комментарий. Аналогичные рассуждения об остатках от деления на 3 (см. задачу №2 за 10 класс) к верному решению не приводят, поскольку 2019 делится на 3, но не делится на 9.

3. Известно, что $ab < 0$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 > 2ab + 2bc + 2ca$.

   Решение 1. Из условия задачи следует, что числа a и b имеют разные знаки. В силу симметрии можно считать, что $a > 0$, $b < 0$. Заметим, что при $c = 0$ неравенство, очевидно, выполняется ($a \neq b$). Пусть $c > 0$, тогда $bc < 0$ и доказываемое неравенство равносильно верному неравенству $(a - c)^2 + b^2 > 0 > 2ab + 2bc$. Аналогично, если $c < 0$, тогда $ac < 0$ и доказываемое неравенство равносильно верному неравенству $(b - c)^2 + a^2 > 0 > 2ab + 2ac$.

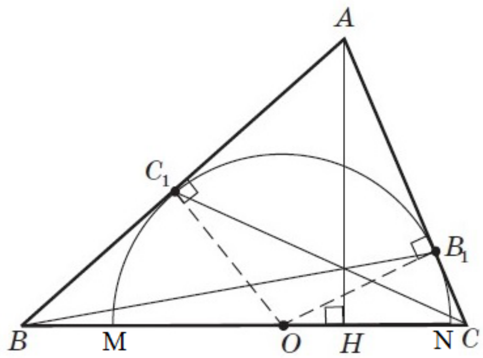
   Решение 2. Рассмотрим и преобразуем разность: $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = c^2 - 2c(a + b) + (a + b)^2 - 4ab = (c - (a + b))^2 - 4ab > 0$, так как $ab < 0$. Следовательно, $a^2 + b^2 + c^2 > 2ab + 2bc + 2ac$.

   Решение 3. Доказываемое неравенство равносильно неравенству $c^2 - 2(a + b)c + a^2 + b^2 - 2ab > 0$. Левая часть этого неравенства – квадратный трёхчлен относительно переменной c: его старший коэффициент равен 1, «ветви» соответствующей параболы направлены вверх. Дискриминант $\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab < 0$. Следовательно, этот квадратный трёхчлен принимает только положительные значения, что и требовалось доказать.

4. В треугольник ABC вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на стороне BC, а дуга касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$
где H – основание высоты, опущенной из точки A на сторону BC.

Комментарий. По теореме Чевы равенство $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BH}{HC}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$ равносильно утверждению: отрезки BB_1, CC_1 и AH пересекаются в одной точке.

Решение.



Пусть MN – диаметр данной полуокружности. Во-первых, отметим, что четырехугольник C_1AB_1O вписанный, поскольку сумма его противоположных углов равна $180°$. Пусть Ω – окружность, описанная около четырехугольника C_1AB_1O, очевидно, что AO ее диаметр. Поскольку отрезок AO виден под прямым углом из точек B_1 и H, то точки A, B_1, H и O лежат на одной окружности, а именно на той же окружности Ω. Введем следующие обозначения: $AC_1 = AB_1 = t$, $BC_1 = x$, $BM = b$, $OH = h$, $NC = c$, $CB_1 = y$, а R – радиус полуокружности с диаметром MN. Так как полуокружность с диаметром MN вписана в угол BAC, то AO – биссектриса этого угла. По свойству биссектрисы треугольника, получаем:

$$\frac{x+t}{y+t}=\frac{b+R}{c+R}. \qquad (1)$$

Далее рассмотрим окружность Ω и пары секущих CA, CO и BA, BH, проведенных из точек C и B соответственно. По свойству секущих, проведенных из одной точки, имеем: $y(y+t) = (c+R-h)(c+R)$ и $x(x+t) = (b+R)(b+R+h)$, откуда $c+R-h=\dfrac{y(y+t)}{c+R}$ и $b+R+h=\dfrac{x(x+t)}{b+R}$.

Итак,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{t}{x}\cdot\frac{b+R+h}{c+R-h}\cdot\frac{y}{t}=\frac{y}{x}\cdot\frac{b+R+h}{c+R-h}=\frac{y}{x}\cdot\frac{x(x+t)}{b+R}\cdot\frac{c+R}{y(y+t)}=$$

$$=\frac{x+t}{y+t}\cdot\frac{c+R}{b+R}=|\text{ в силу равенства (1)}|=\frac{x+t}{y+t}\cdot\frac{y+t}{x+t}=1.$$

Комментарий. Доказано, что точки H, O, C_1, A и B_1 лежат на одной окружности – 3 балла.

5. Найдите все тройки натуральных чисел, для которых выполнено условие: произведение любых двух из них, увеличенное на единицу, делится на оставшееся число.

Решение. Подходит только тройка $(1;1;1)$. Сначала заметим, что среди этих чисел не может быть чётных: если a – чётное, то $bc+1$ – нечётное. Теперь докажем, что эти числа должны быть взаимнопросты. Если это не так, то допустим НОД$(a,b)=m>1$, тогда $ac+1$ даёт остаток 1 при делении на m и, следовательно, не может делиться на b. Рассмотрим число $ab+ac+bc+1$. Оно делится на взаимнопростые числа a, b,

c (поскольку по условию произведение любых двух чисел, увеличенное на единицу, делится на третье число), следовательно, оно делится на abc. Тогда выражение $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}$ должно быть целым числом. Но это невозможно, поскольку сумма дробных частей в этой сумме строго меньше 1: если какие-то из чисел a, b, c больше единицы, то они больше или равны трём. **Ответ: (1;1;1).**

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

(Источник: методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников в 2019/2020 учебном году по математике)

Основные принципы оценивания приведены в следующей таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Требования к проверке работ:

а) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника. Оценивается степень ее правильности и полноты.

б) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов. Недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

в) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

г) Каждая работа должна быть оценена двумя членами Жюри. В случае расхождения их оценок вопрос об окончательном определении баллов, выставляемых за решение указанной задачи, определяется председателем Жюри или назначенным им старшим по классу.